

2017 年绵阳三诊疗科数学答案



咨询热线：400-6171-311

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用共享单车	100	20	120
不常使用共享单车	60	20	80
合计	160	40	200

于是 $a=100$, $b=20$, $c=60$, $d=20$,4分

$$\therefore K^2 = \frac{200 \times (100 \times 20 - 60 \times 20)^2}{120 \times 80 \times 160 \times 40} \approx 2.083 > 2.072,$$

即有 85% 的把握可以认为经常使用共享单车与年龄有关.6 分

(II) 由 (I) 的列联表可知, 经常使用共享单车的“非年轻人”占样本总数的频率为 $\frac{20}{200} \times 100\% = 10\%$, 即在抽取的用户中出现经常使用单车的“非年轻人”的概率为 0.1,

$$\because X \sim B(3, 0.1), X=0, 1, 2, 3,$$

$$\therefore P(X=0) = (1-0.1)^3 = 0.729, \quad P(X=1) = C_3^1 \times 0.1 \times (1-0.1)^2 = 0.243,$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times 0.1^2 \times (1-0.1) = 0.027, \quad P(X=3) = 0.1^3 = 0.001,$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.729	0.243	0.027	0.001

$\therefore X$ 的数学期望 $E(X) = 3 \times 0.1 = 0.3$12 分

19. 解: (I) 作 FE 的中点 P , 连接 CP 交 BE 于点 M , M 点即为所求的点.

.....2分

证明: 连接 PN ,

$\because N$ 是 AD 的中点, P 是 FE 的中点,

$\therefore PN \parallel AF$,

又 $PN \subset$ 平面 MNC , $AF \not\subset$ 平面 MNC ,

\therefore 直线 $AF \parallel$ 平面 MNC5 分

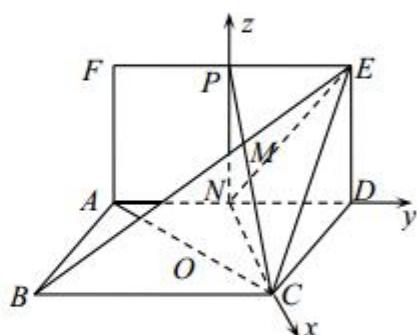
$\because PE \parallel AD$, $AD \parallel BC$,

$\therefore PE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{BM}{ME} = \frac{BC}{PE} = 2.6 分$$

(II) 由 (I) 知 $PN \perp AD$,

又面 $ADEF \perp$ 面 $ABCD$, 面 $ADEF \cap$ 面 $ABCD = AD$, $PN \subset$ 面 $ADEF$,



所以 $PN \perp$ 面 $ABCD$ 8 分

故 $PN \perp ND$, $PN \perp NC$ 9 分

以 N 为空间坐标原点, ND , NC , NP 分别为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系 $N-xyz$,

$$\because \angle ADC = \frac{\pi}{3}, AD = DC = 2,$$

$\therefore \triangle ADC$ 为正三角形, $NC = \sqrt{3}$,

$$\therefore N(0, 0, 0), C(\sqrt{3}, 0, 0), D(0, 1, 0), E(0, 1, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{NE} = (0, 1, 1), \overrightarrow{NC} = (\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{DE} = (0, 0, 1), \overrightarrow{DC} = (\sqrt{3}, -1, 0),$$

设平面 NEC 的一个法向量 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$, 则由 $\mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{NE} = 0$, $\mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{NC} = 0$ 可得

$$\begin{cases} y + z = 0, \\ \sqrt{3}x = 0, \end{cases} \text{令 } y=1, \text{ 则 } \mathbf{n}_1 = (0, 1, -1).$$

设平面 CDE 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = (x_1, y_1, z_1)$, 则由 $\mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DE} = 0$, $\mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ 可得

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ \sqrt{3}x_1 - y_1 = 0, \end{cases} \text{令 } x_1=1, \text{ 则 } \mathbf{n}_2 = (1, \sqrt{3}, 0).$$

$$\text{则 } \cos < \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 > = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{设二面角 } N-CE-D \text{ 的平面角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

\therefore 二面角 $N-CE-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$ 12 分

20. 解: (I) 由题意知, $|ME| + |MF| = |MP| + |MF| = r = 6 > |EF| = 4$,

故由椭圆定义知, 点 M 的轨迹是以点 E , F 为焦点, 长轴为 6, 焦距为 4 的椭圆, 从而长半轴长为 $a=3$, 短半轴长为 $b=\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$,

\therefore 曲线 C 的方程为: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 4 分

(II) 由题知 $F(2, 0)$,

若直线 AB 恰好过原点, 则 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, $N(0, 0)$,

$$\therefore \overrightarrow{NA} = (-3, 0), \overrightarrow{AF} = (5, 0), \text{ 则 } m = -\frac{3}{5},$$

$$\overrightarrow{NB} = (3, 0), \overrightarrow{BF} = (-1, 0), \text{ 则 } n = -3,$$

综上 $f(x)$ 存在唯一零点 $x_0 \in (0, \frac{1}{e})$ 3 分

解：当 $x \in (0, x_0)$, $\mu(x) > 0$, 于是 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增；

当 $x \in (x_0, +\infty)$, $\mu(x) < 0$, 于是 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递减.

故 $f(x)_{\max} = f(x_0) = \ln x_0 + x_0 - 4 - ex_0 e^{x_0}$,

$$\text{又 } \mu(x_0) = 1 - ex_0 e^{x_0} = 0, \quad e^{x_0} = \frac{1}{ex_0}, \quad x_0 = \ln \frac{1}{ex_0} = -1 - \ln x_0,$$

$$\text{故 } f(x)_{\max} = \ln x_0 + (-1 - \ln x_0) - 4 - e^{x_0} \cdot \frac{1}{ex_0} = -5 - 1 = -6. \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 解: $|p(x)| > q(x)$ 等价于 $|\ln x + x - 4| > axe^x$.

$$|\ln x + x - 4| > axe^x \Leftrightarrow a < \frac{|\ln x + x - 4|}{xe^x} = \left| \frac{\ln x + x - 4}{xe^x} \right|, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{\ln x + x - 4}{xe^x}, \text{ 则 } h'(x) = -\frac{(x+1)(\ln x + x - 5)}{x^2 e^x},$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \ln x + x - 5, \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0, \text{ 即 } \varphi(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

又 $\varphi(3) = \ln 3 - 2 < 0$, $\varphi(4) = \ln 4 > 0$,

\therefore 存在 $t \in (3, 4)$, 使得 $\varphi(t) = 0$ 9 分

\therefore 当 $x \in (0, t)$, $\varphi(x) < 0 \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ 在 $(0, t)$ 单调递增;

当 $x \in (t, +\infty)$, $\varphi(x) > 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ 在 $(t, +\infty)$ 单调递减.

$$\because h(1) = -\frac{3}{e} < 0, \quad h(2) = \frac{\ln 2 - 2}{2e^2} < 0, \quad h(3) = \frac{\ln 3 - 1}{3e^3} > 0,$$

且当 $x > 3$ 时, $h(x) > 0$,

$$\text{又 } |h(1)| = \frac{3}{e}, \quad |h(2)| = \frac{2 - \ln 2}{2e^2} > |h(3)| = \frac{\ln 3 - 1}{3e^3}, \quad |h(4)| = \frac{2 \ln 2}{4e^4},$$

故要使不等式 $|p(x)| > q(x)$ 解集中有且只有两个整数, a 的取值范围应为

$$\frac{\ln 3 - 1}{3e^3} \leqslant a < \frac{2 - \ln 2}{2e^2}. \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解: (I) 将 C_1 的参数方程化为普通方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 3$, 即 $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$

$\therefore C_1$ 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2 = 0$ 2 分

将 C_2 的极坐标方程化为直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 5 分

(II) 将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入 C_1 : $\rho^2 - 2\rho \cos\theta - 2 = 0$ 整理得 $\rho^2 - \rho - 2 = 0$,

解得: $\rho_1 = 2$, 即 $|OA| = \rho_1 = 2$.

\therefore 曲线 C_2 是圆心在原点, 半径为 1 的圆,

\therefore 射线 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \geq 0)$ 与 C_2 相交, 则 $\rho_2 = 1$, 即 $|OB| = \rho_2 = 1$.

故 $|AB| = \rho_1 - \rho_2 = 2 - 1 = 1$ 10 分

23. 解: (I) 当 $x \leq \frac{1}{3}$ 时, $f(x) = 7 - 6x$, 由 $f(x) \geq 8$ 解得 $x \leq -\frac{1}{6}$, 综合得 $x \leq -\frac{1}{6}$,

当 $\frac{1}{3} < x < 2$ 时, $f(x) = 5$, 显然 $f(x) \geq 8$ 不成立,

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 6x - 7$, 由 $f(x) \geq 8$ 解得 $x \geq \frac{5}{2}$, 综合得 $x \geq \frac{5}{2}$,

所以 $f(x) \geq 8$ 的解集是 $(-\infty, -\frac{1}{6}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$ 5 分

(II) $f(x) = |3x - a| + |3x - 6| \geq |(3x - a) - (3x - 6)| = |6 - a|$,

$g(x) = |x - 2| + 1 \geq 1$,

\therefore 根据题意 $|6 - a| \geq 1$,

解得 $a \geq 7$, 或 $a \leq 5$ 10 分

