

成都市 2014 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分标准

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. B; 2. A; 3. B; 4. C; 5. B; 6. D;
7. D; 8. A; 9. D; 10. C; 11. C; 12. D.

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. -160 ; 14. -3 ; 15. 5040 ; 16. $3\sqrt{3}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由已知及正弦定理,得 $2\sin C - \sin A = 2\sin B \cos A$ 2 分
 $\because C = 180^\circ - (A + B)$, $\therefore 2\sin(A + B) - \sin A = 2\sin B \cos A$.
化简,得 $\sin A \cdot (2\cos B - 1) = 0$ 4 分
 $\because \sin A \neq 0$, $\therefore \cos B = \frac{1}{2}$.
 $\because 0 < B < \pi$, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$ 6 分
(II)由已知及余弦定理,得 $a^2 + c^2 - ac = 12$ 8 分
即 $(a + c)^2 - 3ac = 12$ 9 分
 $\because a > 0, c > 0$,
 $\therefore (a + c)^2 - 3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \leq 12$, 即 $(a + c)^2 \leq 48$ 11 分
 $\therefore a + c \leq 4\sqrt{3}$, 当且仅当 $a = c = 2\sqrt{3}$ 时,取等号.
 $\therefore a + c$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$ 12 分
18. 解:(I) \because 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,
 $\therefore AC \perp BD$, 且 $AC = 2\sqrt{3}$, $BD = 2$ 1 分
 \because 四边形 $BDEF$ 是矩形, $\therefore DE \perp BD$.
 \because 平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $BDEF \cap$ 平面 $ABCD = BD$,
 $\therefore DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \perp$ 平面 $BDEF$ 3 分
记 $AC \cap BD = O$. 取 EF 中点 H , 则 $OH \parallel DE$.
 $\therefore OH \perp$ 平面 $ABCD$.
如图,以 O 为原点,分别以 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OH}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Oxyz$ 4 分
由题意,得 $B(1, 0, 0)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $A(0, -\sqrt{3}, 0)$, $E(-1, 0, 2)$, $F(1, 0, 2)$.
 $\therefore \overrightarrow{AC} = (0, 2\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{AE} = (-1, \sqrt{3}, 2)$.
 $\therefore M$ 为线段 BF 上一点,设 $M(1, 0, t)$ ($0 \leq t \leq 2$). 5 分

$$\therefore \overrightarrow{DM} = (2, 0, t).$$

$$\because DM \perp \text{平面 } ACE, \therefore \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AE}.$$

$$\therefore \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AE} = -2 + 0 + 2t = 0. \text{ 解得 } t = 1.$$

$$\therefore M(1, 0, 1).$$

$$\therefore BM = 1.$$

.....7 分

$$(II) \text{ 由(I), 可知 } AC \perp \text{平面 } BDEF.$$

$$\therefore AC \perp \text{平面 } DMB.$$

$$\overrightarrow{AD} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AM} = (1, \sqrt{3}, 1).$$

$$\text{设平面 } ADM \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (x, y, z).$$

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0 \\ x + \sqrt{3}y + z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{取 } y = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{3}).$$

.....9 分

$$\therefore \cos < \mathbf{n}, \overrightarrow{AC} > = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2\sqrt{3}}{4 \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{二面角 } A - DM - B \text{ 的余弦值为 } \frac{1}{4}.$$

.....12 分

19. 解: (I) 根据所给数据得到如下 2×2 列联表:

	年龄低于 35 岁	年龄不低于 35 岁	合计
支持	30	10	40
不支持	5	5	10
合计	35	15	50

.....2 分

根据 2×2 列联表中的数据, 得到 K^2 的观测值为

$$k = \frac{50 (30 \times 5 - 10 \times 5)^2}{(30 + 10)(5 + 5)(30 + 5)(10 + 5)} \approx 2.38 < 2.706.$$

.....5 分

\therefore 不能在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下, 认为年龄与是否支持发展共享单车有关系.

.....6 分

(II) 由题意, 年龄在 $[15, 20)$ 的 5 个受访人中, 有 4 人支持发展共享单车; 年龄在 $[20, 25)$ 的 6 个受访人中, 有 5 人支持发展共享单车.

\therefore 随机变量 X 的所有可能取值为 2, 3, 4.

.....7 分

$$\therefore P(X=2) = \frac{C_4^1 C_5^1}{C_5^2 C_6^2} = \frac{2}{15}, P(X=3) = \frac{C_4^1 C_5^2 + C_4^2 C_5^1}{C_5^2 C_6^2} = \frac{7}{15}, P(X=4) = \frac{6}{15},$$

\therefore 随机变量 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{6}{15}$

.....10 分

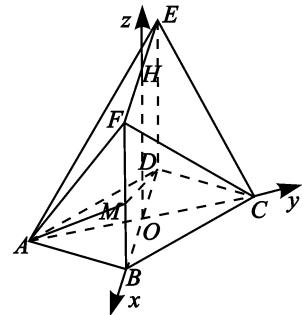
$$\therefore \text{随机变量 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{7}{15} + 4 \times \frac{6}{15} = \frac{49}{15}.$$

.....12 分

20. 解: (I) \because 点 Q 在线段 AP 的垂直平分线上, $\therefore |AQ| = |PQ|$.

$$\text{又 } |CP| = |CQ| + |QP| = 2\sqrt{2}, \therefore |CQ| + |QA| = 2\sqrt{2} > |CA| = 2.$$

.....2 分



∴ 曲线 E 是以坐标原点为中心, $C(-1, 0)$ 和 $A(1, 0)$ 为焦点, 长轴长为 $2\sqrt{2}$ 的椭圆. 3 分

设曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$\because c = 1, a = \sqrt{2}$, $\therefore b^2 = 2 - 1 = 1$ 4 分

∴ 曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 5 分

(Ⅱ) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 y , 得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$ 6 分

此时有 $\Delta = 16k^2 - 8m^2 + 8 > 0$.

由一元二次方程根与系数的关系, 得

$$x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1 + 2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}. 7 \text{ 分}$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(\frac{-4km}{1 + 2k^2}\right)^2 - 4 \times \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{1 + 2k^2} \sqrt{8(2k^2 - m^2 + 1)}. 8 \text{ 分}$$

$$\because \text{原点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}}, 9 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} |MN| \cdot d = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2k^2} \sqrt{m^2(2k^2 - m^2 + 1)}.$$

由 $\Delta > 0$, 得 $2k^2 - m^2 + 1 > 0$. 又 $m \neq 0$, ∴ 据基本不等式, 得

$$S_{\triangle MON} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{1 + 2k^2} \cdot \frac{m^2 + (2k^2 - m^2 + 1)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当且仅当 $m^2 = \frac{2k^2 + 1}{2}$ 时, 不等式取等号. 11 分

∴ $\triangle MON$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12 分

21. 解: (Ⅰ) 由 $f(x) \leqslant \frac{1}{2}x - 1$, 得 $\ln x + \frac{a}{x} - 1 \leqslant \frac{1}{2}x - 1$.

即 $a \leqslant -x \ln x + \frac{1}{2}x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立. 1 分

设函数 $m(x) = -x \ln x + \frac{1}{2}x^2, x \geqslant 1$.

则 $m'(x) = -\ln x + x - 1$ 2 分

设 $n(x) = -\ln x + x - 1$.

则 $n'(x) = -\frac{1}{x} + 1$. 易知当 $x \geqslant 1$ 时, $n'(x) \geqslant 0$.

∴ $n(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $n(x) \geqslant n(1) = 0$.

即 $m'(x) \geqslant n'(1) = 0$ 对 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立.

$\therefore m(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

\therefore 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $m(x) \geq m(x)_{\min} = m(1) = \frac{1}{2}$.

$\therefore a \leq \frac{1}{2}$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 4 分

$$(II) g(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x}, x \in [1, e^2].$$

$$\therefore g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2a}{x^3} = \frac{2x - x \ln x - 2a}{x^3}.$$

设 $h(x) = 2x - x \ln x - 2a$, 则 $h'(x) = 2 - (1 + \ln x) = 1 - \ln x$.

由 $h'(x) = 0$, 得 $x = e$.

当 $1 \leq x < e$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $e < x \leq e^2$ 时, $h'(x) < 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $[1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, e^2]$ 上单调递减.

且 $h(1) = 2 - 2a$, $h(e) = e - 2a$, $h(e^2) = -2a$ 5 分

显然 $h(1) > h(e^2)$.

结合函数图象可知, 若 $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上存在极值,

则 $\begin{cases} h(e) > 0 \\ h(1) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} h(1) \geq 0 \\ h(e^2) < 0 \end{cases}$ 7 分

(i) 当 $\begin{cases} h(e) > 0 \\ h(1) < 0 \end{cases}$, 即 $1 < a < \frac{e}{2}$ 时,

则必定 $\exists x_1, x_2 \in [1, e^2]$, 使得 $h(x_1) = h(x_2) = 0$, 且 $1 < x_1 < e < x_2 < e^2$.

当 x 变化时, $h(x), g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(1, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, e^2)
$h(x)$	—	0	+	0	—
$g'(x)$	—	0	+	0	—
$g(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

\therefore 当 $1 < a < \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的极值为 $g(x_1)$, $g(x_2)$, 且 $g(x_1) < g(x_2)$.

$$\therefore g(x_1) = \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{a}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 \ln x_1 - x_1 + a}{x_1^2}.$$

设 $\varphi(x) = x \ln x - x + a$, 其中 $1 < a < \frac{e}{2}$, $1 \leq x < e$.

$\because \varphi'(x) = \ln x > 0$, $\therefore \varphi(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, $\varphi(x) \geq \varphi(1) = a - 1 > 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号.

$\therefore 1 < x_1 < e$, $\therefore g(x_1) > 0$.

\therefore 当 $1 < a < \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的极值 $g(x_2) > g(x_1) > 0$ 10 分

(ii) 当 $\begin{cases} h(1) \geq 0 \\ h(e^2) < 0 \end{cases}$, 即 $0 < a \leq 1$ 时,

则必定 $\exists x_3 \in (1, e^2)$, 使得 $h(x_3) = 0$.

易知 $g(x)$ 在 $(1, x_3)$ 上单调递增, 在 $(x_3, e^2]$ 上单调递减.

此时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的极大值是 $g(x_3)$, 且 $g(x_3) > g(e^2) = \frac{a + e^2}{e^4} > 0$.

∴当 $0 < a \leq 1$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的极值为正数. 12 分

综上所述:当 $0 < a < \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上存在极值,且极值都为正数.

注:也可由 $g'(x)=0$, 得 $2a=2x-x\ln x$. 令 $h(x)=2x-x\ln x$ 后再研究 $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的极值问题.

$$22. \text{解:} (\text{I}) \text{由 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \text{消去参数 } t, \text{得 } y = x + 3\sqrt{5}.$$

即直线 l 的普通方程为 $x - y + 3\sqrt{5} = 0$ 2 分

$$\therefore x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \therefore x^2 + y^2 = \rho^2 = 4.$$

即曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 4$ 5 分

(II) 由 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 2x' \\ y = y' \end{cases}$.

代入方程 $x^2 + y^2 = 4$, 得 $x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1$ 7 分

已知 $M(x, y)$ 为曲线 C' 上任意一点, 故可设 $M(\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, 其中 α 为参数.

则点 M 到直线 l 的距离

∴点M到直线l的最小距离为 $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$10分

23. 解:(I)当 $a=1$ 时,不等式即为 $|x-1|+|2x-5|\geqslant 6$.

当 $x \leq 1$ 时, 不等式可化为 $-(x-1) - (2x-5) \geq 6$, ∴ $x \leq 0$; 1 分

当 $1 < x < \frac{5}{2}$ 时, 不等式可化为 $(x - 1) - (2x - 5) \geq 6$, $\therefore x \in \emptyset$;

.....2分

当 $x \geqslant \frac{5}{2}$ 时, 不等式可化为 $(x-1) + (2x-5) \geqslant 6$, ∴ $x \geqslant 4$ 3 分

综上所述:原不等式的解集为 $\{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$5分

$$(II) \Leftrightarrow | |x-a| - |x-3| | \leq |x-a-(x-3)| = |a-3| ,$$

∴ 函数 $g(x)$ 的值域 $A = [-|a-3|, |a-3|]$.

$$\because [-1, 2] \subseteq A, \therefore \boxed{a - 3 \leq -1}$$

$$\left(|a - 3| \geqslant 2 \right)$$

.....9 分

解得 $a \leq 1$ 或 $a \geq 5$.

.....10分