

成都市 2014 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分标准

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. A; 3. B; 4. C; 5. D; 6. B;
7. D; 8. A; 9. A; 10. D; 11. C; 12. D.

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 1; 14. -3; 15. -1; 16. 10.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解: (I) 由已知及正弦定理, 得 $2\sin C - \sin A = 2\sin B \cos A$ 2分

$$\because C = 180^\circ - (A + B), \therefore 2\sin(A + B) - \sin A = 2\sin B \cos A.$$

化简,得 $\sin A \cdot (2\cos B - 1) = 0$5分

$$\therefore \sin A \neq 0 \therefore \cos B = -\frac{1}{2}$$

$$\sin A = \frac{1}{2}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(II) 由全弦定理得 $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos\theta$

(II)由余弦定理,得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$:

已知 $a=2$, $b=\sqrt{7}$, \dots , 即 $c^2-2c-3=0$10分

解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (不合题意, 去掉).

$\therefore c$ 的长为 3. 12 分

18. 解:(1)如图,记 $AC \cap BD = O$.

- 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore AC \perp BD$, 且 $AC = 2\sqrt{3}$, $BD = 2$.

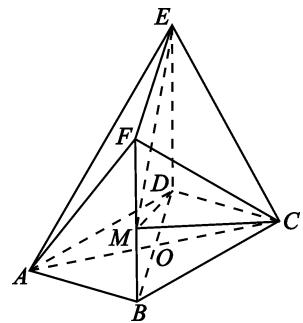
.....1分

\because 四边形 $BDEF$ 是矩形, 平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AC \perp$ 平面 $BDEF$.

.....3分

$\because DE = 2$, M 为线段 BF 的中点,



(Ⅱ)由(Ⅰ),可知 $AC \perp$ 平面 $BDEF$.
 $\therefore AC \perp DM$ 7 分

则在正方形 $BDEF$ 中, $\tan \angle BDM = \frac{1}{2}$, $\tan \angle DOE = 2$.

$\therefore \angle BDM + \angle DOE = 90^\circ$.
 $\therefore OE \perp DM$ 10 分
 $\because AC \cap OE = O$, 且 $AC, OE \subseteq$ 平面 ACE ,
 $\therefore DM \perp$ 平面 ACE 12 分

19. 解:(Ⅰ)根据所给数据得到如下 2×2 列联表:

| | 年龄低于 35 岁 | 年龄不低于 35 岁 | 合计 | |
|-----|-----------|------------|----|-----------|
| 支持 | 30 | 10 | 40 | 2 分 |
| 不支持 | 5 | 5 | 10 | |
| 合计 | 35 | 15 | 50 | |

根据 2×2 列联表中的数据,得到 K^2 的观测值为

$$k = \frac{50 (30 \times 5 - 10 \times 5)^2}{(30+10)(5+5)(30+5)(10+5)} \approx 2.38 < 2.706. 5 分$$

\therefore 不能在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下,认为年龄与是否支持发展共享单车有关系. 6 分

(Ⅱ)“对年龄在 $[15,20)$ 的被调查人中随机选取两人进行调查,恰好这两人都支持发展共享单车”记为事件 A , 7 分

对年龄在 $[15,20)$ 的 5 个受访人中,有 4 人支持,1 人不支持发展共享单车,分别记为 A_1, A_2, A_3, A_4, B . 则从这 5 人中随机抽取 2 人的基本事件为:

$\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \{A_1, B\},$
 $\{A_2, A_3\}, \{A_2, A_4\}, \{A_2, B\},$
 $\{A_3, A_4\}, \{A_3, B\},$
 $\{A_4, B\}$. 共 10 个. 9 分

其中,恰好抽取的两人都支持发展共享单车的基本事件包含 $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\},$
 $\{A_1, A_4\}, \{A_2, A_3\}, \{A_2, A_4\}, \{A_3, A_4\}$. 共 6 个. 10 分

$$\therefore P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

\therefore 对年龄在 $[15,20)$ 的被调查人中随机选取两人进行调查,恰好这两人都支持发展共享单车的概率是 $\frac{3}{5}$ 12 分

20. 解:(Ⅰ)由已知,设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

\because 椭圆 E 的短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形,
 $\therefore b = c$ 2 分

由 $a^2 = b^2 + c^2$, 得 $b^2 = 1$ 4 分

∴ 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 5 分

(II) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} y = 2x + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 y , 得 $9x^2 + 8mx + 2m^2 - 2 = 0$ 6 分

此时有 $\Delta = 72 - 8m^2 > 0$.

由一元二次方程根与系数的关系,得

$$\therefore S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} | MN | \cdot d = \frac{\sqrt{2}}{9} \sqrt{m^2(9 - m^2)} .$$

由 $\Delta > 0$, 得 $9 - m^2 > 0$. 又 $m \neq 0$, \therefore 据基本不等式, 得

$$S_{\triangle MON} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{m^2 + (9 - m^2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当且仅当 $m^2 = \frac{9}{2}$ 时, 不等式取等号. 11 分

$\therefore \triangle MON$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12 分

21. 解:(I)由 $f(x) > -x + 1$, 得 $\ln x + \frac{a}{x} - 1 > -x + 1$.

即 $a > -x \ln x - x^2 + 2x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立. 1 分

设函数 $m(x) = -x \ln x - x^2 + 2x$, $x \geq 1$.

$\because x \in [1, +\infty)$, $\therefore -\ln x \leq 0$, $-2x + 1 < 0$.

∴当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $m'(x) = -\ln x - 2x + 1 < 0$.

$\therefore m(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减. 3 分

∴当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $m(x) \leq m(x)_{\max} = m(1) = 1$.

$\therefore a > 1$, 即 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$ 4 分

$$(II) g(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}, x \in [1, e^2].$$

设 $h(x) = 2x - x \ln x - 2a$, 则 $h'(x) = 2 - (1 + \ln x) = 1 - \ln x$.

由 $h'(x) = 0$, 得 $x = e$.

当 $1 \leq x < e$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $e < x \leq e^2$ 时, $h'(x) < 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 在 $(e, e^2]$ 上单调递减.

且 $h(1) = 2 - 2a$, $h(e) = e - 2a$, $h(e^2) = -2a$.

据(I), 可知 $h(e^2) < h(1) < 0$8分

(i) 当 $h(e) = e - 2a \leq 0$, 即 $a \geq \frac{e}{2}$ 时, $h(x) \leq 0$ 即 $g'(x) \leq 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上单调递减.

\therefore 当 $a \geq \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上不存在极值.9分

(ii) 当 $h(e) > 0$, 即 $1 < a < \frac{e}{2}$ 时,

则必定 $\exists x_1, x_2 \in [1, e^2]$, 使得 $h(x_1) = h(x_2) = 0$, 且 $1 < x_1 < e < x_2 < e^2$.

.....10分

当 x 变化时, $h(x), g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表:

| x | $(1, x_1)$ | x_1 | (x_1, x_2) | x_2 | (x_2, e^2) |
|---------|------------|-------|--------------|-------|--------------|
| $h(x)$ | — | 0 | + | 0 | — |
| $g'(x)$ | — | 0 | + | 0 | — |
| $g(x)$ | ↘ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ |

\therefore 当 $1 < a < \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的极值为 $g(x_1), g(x_2)$, 且 $g(x_1) < g(x_2)$.

$$\therefore g(x_1) = \frac{\ln x_1}{x_1} + \frac{a}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 \ln x_1 - x_1 + a}{x_1^2}.$$

设 $\varphi(x) = x \ln x - x + a$, 其中 $1 < a < \frac{e}{2}$, $1 \leq x < e$.

$\because \varphi'(x) = \ln x > 0$, $\therefore \varphi(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, $\varphi(x) \geq \varphi(1) = a - 1 > 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号.

$\therefore 1 < x_1 < e$, $\therefore g(x_1) > 0$.

\therefore 当 $1 < a < \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的极值 $g(x_2) > g(x_1) > 0$12分

综上所述: 当 $a \geq \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上不存在极值; 当 $1 < a < \frac{e}{2}$ 时, $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上存在极值, 且极值均为正.

注: 也可由 $g'(x) = 0$, 得 $2a = 2x - x \ln x$. 令 $h(x) = 2x - x \ln x$ 后再研究 $g(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的极值问题.

22. 解:(I) 由 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 消去参数 t , 得 $y = x + 3\sqrt{5}$.

即直线 l 的普通方程为 $x - y + 3\sqrt{5} = 0$ 2 分

$$\because x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \therefore x^2 + y^2 = \rho^2 = 4.$$

即曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 4$ 5 分

(Ⅱ)由 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 2x' \\ y = y' \end{cases}$.

代入方程 $x^2 + y^2 = 4$, 得 $x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1$ 7 分

已知 $M(x, y)$ 为曲线 C' 上任意一点, 故可设 $M(\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, 其中 α 为参数.

则点 M 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|\cos\alpha - 2\sin\alpha + 3\sqrt{5}|}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{5}\cos(\alpha + \beta) + 3\sqrt{5}|}{\sqrt{2}}, \text{ 其中 } \tan\beta = 2.$$

..... 9 分

23. 解:(I)当 $a=1$ 时,不等式即为 $|x-1|+|2x-5|\geqslant 6$.

当 $x \leq 1$ 时, 不等式可化为 $-(x-1) - (2x-5) \geq 6$, $\therefore x \leq 0$; 1 分

当 $1 < x < \frac{5}{2}$ 时, 不等式可化为 $(x - 1) - (2x - 5) \geq 6$, $\therefore x \in \emptyset$;

.....2分

² 例如所述，原不等式的解集为 $(-\infty < x < 0)$ 。

$$(II) \because |x-a| - |x-3| \leq |x-a-(x-3)| = |a-3|$$

$$\therefore f(x) = |x - 3| \equiv |x - a| - |x - 3| \in [-|a - 3|, |a - 3|],$$

∴ 函数 $g(x)$ 的值域 $A = [-|a-3|, |a-3|]$ 7分

解得 $a \leq 1$ 或 $a \geq 5$ 9 分

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ 10 分