

20、解:

(1)函数 $y = |x-1| + |x-3|$ 的最小值的几何意义为数轴上 x 到 1 和 3 两点距离和的最小值,

利用两点之间直线段最短, 可知当 $1 \leq x \leq 3$, $y_{\min} = |3-1| = 2$②分

(2) $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| = (|x-1| + |x-3|) + |x-2|$, 由 (1) 知当 $1 \leq x \leq 3$, $|x-1| + |x-3|$ 有最小值 2, 而当 $x = 2$, $|x-2|$ 有最小值 0, 结合两者, 可知当 $x = 2$, $y_{\min} = 2 + 0 = 2$6分

(3)①若 n 为偶数时, $y = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-n|$ 变形可得

$$y = (|x-1| + |x-n|) + (|x-2| + |x-(n-1)|) + \dots + \left(\left| x - \frac{n}{2} \right| + \left| x - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right| \right),$$

由(1)知当 $\frac{n}{2} \leq x \leq \frac{n}{2} + 1$ 时, $|x-1| + |x-n|$ 有最小值 $n-1$, $|x-2| + |x-(n-1)|$ 有最小值 $(n-1)-2$, 即 $n-3$, \dots , $\left| x - \frac{n}{2} \right| + \left| x - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right|$ 有最小值 1, 因而当 $\frac{n}{2} \leq x \leq \frac{n}{2} + 1$

时, $y_{\min} = 1 + 3 + \dots + (n-3) + (n-1) = \frac{n}{2} \cdot \frac{1+(n-1)}{2} = \frac{n^2}{4}$10分

②若 n 为奇数时, $y = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-n|$ 变形可得 $y = (|x-1| + |x-n|) +$

$$\left(|x-2| + |x-(n-1)| \right) + \dots + \left(\left| x - \left(\frac{n-1}{2} \right) \right| + \left| x - \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) \right| \right) + \left| x - \left(\frac{n+1}{2} \right) \right|,$$

由 (1) 知当 $x = \frac{n+1}{2}$ 时, $|x-1| + |x-n|$ 有最小值 $n-1$, \dots ,

$\left| x - \left(\frac{n-1}{2} \right) \right| + \left| x - \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) \right|$ 有最小值 2, $\left| x - \left(\frac{n+1}{2} \right) \right|$ 有最小值 0, 因而当 $x = \frac{n+1}{2}$ 时,

$y_{\min} = 0 + 2 + \dots + (n-3) + (n-1) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2+(n-1)}{2} = \frac{n^2-1}{4}$14分

(4)类似(3)的做法, 可知 $y = |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_n|$ ($a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$),

若 n 为偶数时, 当 $a_{\frac{n}{2}} \leq x \leq a_{\frac{n}{2}+1}$ 时, y 有最小值; 若 n 为奇数时, 当 $x = a_{\frac{n+1}{2}}$ 时, y 有

最小值. 而 $y = |x-1| + |2x-1| + \dots + |8x-1| + |9x-1|$ 可变形为

$$y = \underbrace{\left(\left| x - \frac{1}{9} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{9} \right| \right)}_{9\text{个}} + \underbrace{\left(\left| x - \frac{1}{8} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{8} \right| \right)}_{8\text{个}} + \dots + \underbrace{\left(\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| x - \frac{1}{2} \right| \right)}_{2\text{个}} + \underbrace{|x-1|}_{1\text{个}}, \quad n \text{ 为 } 45,$$

$a_1 = a_2 = \dots = a_9 = \frac{1}{9}$, $a_{10} = a_{11} = \dots = a_{17} = \frac{1}{8}$, $a_{18} = a_{19} = \dots = a_{24} = \frac{1}{7}$, \dots ,

当 $x = a_{23} = \frac{1}{7}$ 时, $y_{\min} = \left| \frac{1}{7} - 1 \right| + \left| \frac{2}{7} - 1 \right| + \dots + \left| \frac{8}{7} - 1 \right| + \left| \frac{9}{7} - 1 \right| = \frac{24}{7}$20分