

2017 年普通高等学校招生全国统一考试
理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。



【答案】B⁺

【解析】 p_1 : 设 $z = a + bi$, 则 $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \in \mathbf{R}$, 得到 $b=0$, 所以 $z \in \mathbf{R}$. 故 p_1 正确; \downarrow

p_2 : 若 $z^2 = -1$, 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$, 而 $z = i$, 不满足 $z \in \mathbf{R}$, 故 p_2 不正确; \downarrow

p_3 : 若 $z_1 = 1, z_2 = 2$, 则 $z_1 z_2 = 2$, 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$, 而它们实部不相等, 不是共轭复数, 故 p_3 不正确; \downarrow

p_4 : 实数没有虚部, 所以它的共轭复数是它本身, 也属于实数, 故 p_4 正确; \downarrow

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_4 + a_5 = 24, S_6 = 48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为 () \downarrow

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8⁺

【答案】C⁺

【解析】 $a_4 + a_5 = a_1 + 3d + a_1 + 4d = 24 \downarrow$

$$S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 48 \downarrow$$

$$\text{联立求得} \begin{cases} 2a_1 + 7d = 24 & \text{①} \\ 6a_1 + 15d = 48 & \text{②} \end{cases} \downarrow$$

$$\text{①} \times 3 - \text{②} \text{ 得 } (21-15)d = 24 \downarrow$$

$$6d = 24 \downarrow$$

$$\therefore d = 4 \downarrow$$

选 C⁺

5. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是 () \downarrow

- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$ ⁺

【答案】D⁺

【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-1) = -f(1) = 1, \downarrow$

于是 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 等价于 $f(1) \leq f(x-2) \leq f(-1) \downarrow$

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减 \downarrow

$$\therefore -1 \leq x-2 \leq 1 \downarrow$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 3 \downarrow$$

故选 D⁺

6. $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为 \downarrow

- A. 15 B. 20 C. 30 D. 35⁺

【答案】C⁺

【解析】 $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6 = 1 \cdot (1+x)^6 + \frac{1}{x^2} \cdot (1+x)^6 \downarrow$

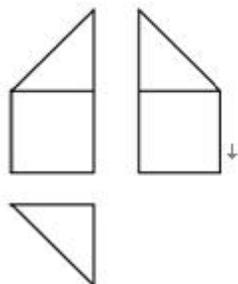
对 $(1+x)^6$ 的 x^2 项系数为 $C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \downarrow$

对 $\frac{1}{x^2} \cdot (1+x)^6$ 的 x^2 项系数为 $C_6^4 = 15, \downarrow$

$\therefore x^2$ 的系数为 $15 + 15 = 30 \downarrow$

故选 C \downarrow

7. 某多面体的三视图如图所示，其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为 2，俯视图为等腰直角三角形。该多面体的各个面中有若干是梯形，这些梯形的面积之和为 \downarrow



A. 10

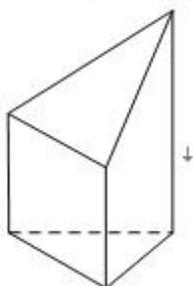
B. 12

C. 14

D. 16 \downarrow

【答案】 B \downarrow

【解析】 由三视图可画出立体图 \downarrow



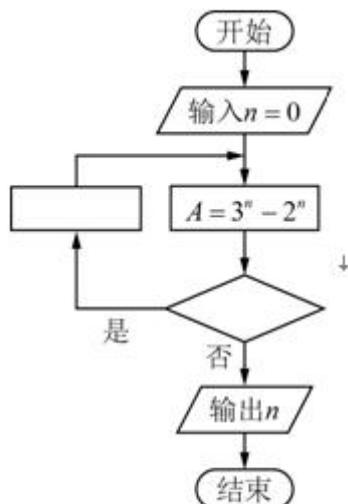
该立体图平面内只有两个相同的梯形的面 \downarrow

$$S_{\text{梯}} = (2+4) \times 2 \div 2 = 6 \downarrow$$

$$S_{\text{全梯}} = 6 \times 2 = 12 \downarrow$$

故选 B \downarrow

8. 右面程序框图是为了求出满足 $3^n - 2^n > 1000$ 的最小偶数 n ，那么在  和  两个空白框中，可以分别填入 \downarrow



A. $A > 1000$ 和 $n = n + 1$

B. $A > 1000$ 和 $n = n + 2$

C. $A \leq 1000$ 和 $n = n + 1$

D. $A \leq 1000$ 和 $n = n + 2$

【答案】D

【答案】因为要求A 大于 1000 时输出，且框图中在“否”时输出

∴ “ \diamond ” 中不能输入 $A > 1000$

排除 A、B

又要求 n 为偶数，且 n 初始值为 0

“ \square ” 中 n 依次加 2 可保证其为偶

故选 D

9. 已知曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 则下面结论正确的是 ()

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

【答案】D

【解析】 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ↓

首先曲线 C_1 、 C_2 统一为一三角函数名，可将 $C_1: y = \cos x$ 用诱导公式处理。↓

$y = \cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。横坐标变换需将 $\omega = 1$ 变成 $\omega = 2$ ，↓

即 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{C_1 \text{上各点横坐标缩为原来} \frac{1}{2}}$ $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ↓

→ $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。↓

注意 ω 的系数，在右平移需将 $\omega = 2$ 提到括号外面，这时 $x + \frac{\pi}{4}$ 平移至 $x + \frac{\pi}{3}$ ，↓

根据“左加右减”原则，“ $x + \frac{\pi}{4}$ ”到“ $x + \frac{\pi}{3}$ ”需加上 $\frac{\pi}{12}$ ，即再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 。↓

10. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直 l_1, l_2 ，直线 l_1 与 C 交于 A 、 B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D 、 E 两点， $|AB| + |DE|$ 的最小值为 () ↓

A. 16

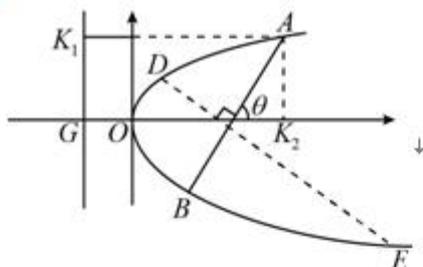
B. 14

C. 12

D. 10

【答案】 A

【解析】 ↓



设 AB 倾斜角为 θ 。作 AK_1 垂直准线， AK_2 垂直 x 轴 ↓

$$\begin{cases} |AF| \cdot \cos \theta + |GF| = |AK_1| \quad (\text{几何关系}) \\ |AK_1| = |AF| \quad (\text{抛物线特性}) \\ |GF| = \frac{P}{2} - \left(-\frac{P}{2}\right) = P \end{cases} \downarrow$$

$$\therefore |AF| \cdot \cos \theta + P = |AF| \downarrow$$

$$\text{同理 } |AF| = \frac{P}{1 - \cos \theta}, \quad |BF| = \frac{P}{1 + \cos \theta} \downarrow$$

$$\therefore |AB| = \frac{2P}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2P}{\sin^2 \theta} \downarrow$$

又 DE 与 AB 垂直，即 DE 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2} + \theta$ ↓

$$|DE| = \frac{2P}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{2P}{\cos^2\theta} \downarrow$$

$$\text{而 } y^2 = 4x, \text{ 即 } P = 2 \downarrow$$

$$\begin{aligned} \therefore |AB| + |DE| &= 2P \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} \right) = 4 \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta} = \frac{4}{\sin^2\theta \cos^2\theta} = \frac{4}{\frac{1}{4} \sin^2 2\theta} \downarrow \\ &= \frac{16}{\sin^2 2\theta} \geq 16, \text{ 当 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 取等号} \downarrow \end{aligned}$$

即 $|AB| + |DE|$ 最小值为 16，故选 A \downarrow

11. 设 x, y, z 为正数，且 $2^x = 3^y = 5^z$ ，则 () \downarrow

- A. $2x < 3y < 5z$ B. $5z < 2x < 3y$ C. $3y < 5z < 2x$
 D. $3y < 2x < 5z$ \downarrow

【答案】 D \downarrow

【答案】 取对数： $x \ln 2 = y \ln 3 = z \ln 5$ \downarrow

$$\frac{x}{y} = \frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{3}{2} \downarrow$$

$$\therefore 2x > 3y \downarrow$$

$$x \ln 2 = z \ln 5 \downarrow$$

$$\text{则 } \frac{x}{z} = \frac{\ln 5}{\ln 2} < \frac{5}{2} \downarrow$$

$$\therefore 2x < 5z \therefore 3y < 2x < 5z, \text{ 故选 D} \downarrow$$

12. 几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件，为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动，这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列 $1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ ，其中第一项是 2^0 ，接下来的两项是 $2^0, 2^1$ ，在接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$ ，依次类推，求满足如下条件的最小整数 N ： $N > 100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂。那么该款软件的激活码是 () \downarrow

- A. 440 B. 330 C. 220 D. 110 \downarrow

【答案】 A \downarrow

【解析】 设首项为第 1 组，接下来两项为第 2 组，再接下来三项为第 3 组，以此类推。↓

设第 n 组的项数为 n ，则 n 组的项数和为 $\frac{n(1+n)}{2}$ ↓

由题， $N > 100$ ，令 $\frac{n(1+n)}{2} > 100 \rightarrow n \geq 14$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ ，即 N 出现在第 13 组之后 ↓

第 n 组的和为 $\frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ ↓

n 组总共的和为 $\frac{2(1-2^n)}{1-2} - n = 2^n - 2 - n$ ↓

若要使前 N 项和为 2 的整数幂，则 $N - \frac{n(1+n)}{2}$ 项的和 $2^k - 1$ 应与 $-2 - n$ 互为相反

数 ↓

即 $2^k - 1 = 2 + n$ ($k \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 14$) ↓

$k = \log_2(n+3)$ ↓

$\rightarrow n = 29, k = 5$ ↓

则 $N = \frac{29 \times (1+29)}{2} + 5 = 440$ ↓

故选 A ↓

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。↖

13. 已知向量 \vec{a} ， \vec{b} 的夹角为 60° ， $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____。↖

【答案】 $2\sqrt{3}$ ↖

【解析】 $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |2\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ + (2|\vec{b}|)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2^2$

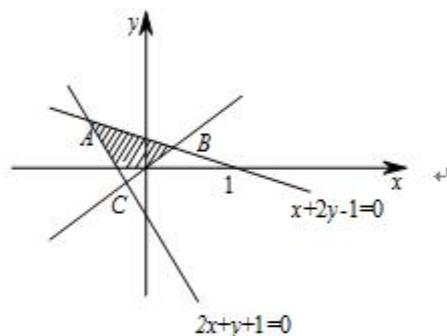
$= 4 + 4 + 4 = 12$ ↓

$\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ↖

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z=3x-2y$ 的最小值为_____.

【答案】 -5

不等式组 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域如图所示



由 $z=3x-2y$ 得 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$,

求 z 的最小值, 即求直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ 的纵截距的最大值

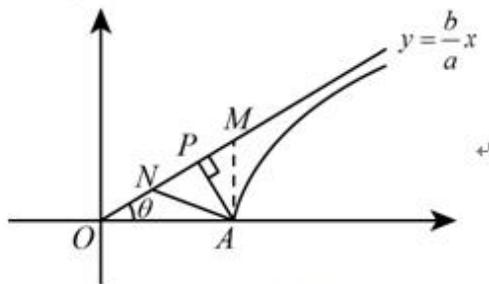
当直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ 过图中点 A 时, 纵截距最大

由 $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ 解得 A 点坐标为 $(-1, 1)$, 此时 $z=3 \times (-1) - 2 \times 1 = -5$

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, ($a > 0, b > 0$) 的右顶点为 A , 以 A 为圆心, b 为半径作圆 A , 圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 若 $\angle MAN = 60^\circ$, 则 C 的离心率为_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】如图，



$$|OA| = a, |AN| = |AM| = b$$

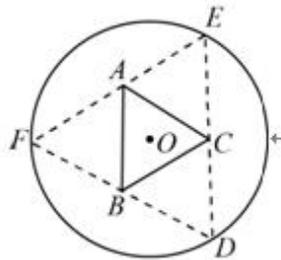
$$\because \angle MAN = 60^\circ, \therefore |AP| = \frac{\sqrt{3}}{2}b, |OP| = \sqrt{|OA|^2 - |PA|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}b^2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{|AP|}{|OP|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}b^2}}$$

$$\text{又} \because \tan \theta = \frac{b}{a}, \therefore \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}b^2}} = \frac{b}{a}, \text{解得 } a^2 = 3b^2$$

$$\therefore e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

16. 如图，圆形纸片的圆心为 O ，半径为 5 cm ，该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O ， D 、 E 、 F 为圆 O 上的点， $\triangle DBC$ ， $\triangle ECA$ ， $\triangle FAB$ 分别是以 BC ， CA ， AB 为底边的等腰三角形，沿虚线剪开后，分别以 BC ， CA ， AB 为折痕折起 $\triangle DBC$ ， $\triangle ECA$ ， $\triangle FAB$ ，使得 D ， E ， F 重合，得到三棱锥。当 $\triangle ABC$ 的边长变化时，所得三棱锥体积（单位： cm^3 ）的最大值为_____。



【答案】 $4\sqrt{15}$

【解析】由题，连接 OD ，交 BC 与点 G ，由题， $OD \perp BC \downarrow$

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{6} BC, \text{ 即 } OG \text{ 的长度与 } BC \text{ 的长度或成正比} \downarrow$$

$$\text{设 } OG = x, \text{ 则 } BC = 2\sqrt{3}x, DG = 5 - x \downarrow$$

$$\text{三棱锥的高 } h = \sqrt{DG^2 - OG^2} = \sqrt{25 - 10x + x^2 - x^2} = \sqrt{25 - 10x} \downarrow$$

$$S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3} \cdot 3x \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}x^2 \downarrow$$

$$\text{则 } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \sqrt{3}x^2 \cdot \sqrt{25 - 10x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25x^4 - 10x^5} \downarrow$$

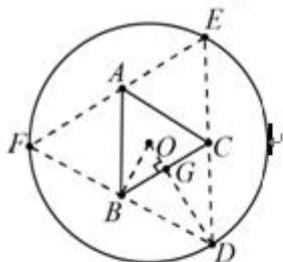
$$\text{令 } f(x) = 25x^4 - 10x^5, x \in (0, \frac{5}{2}), f'(x) = 100x^3 - 50x^4 \downarrow$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 即 } x^4 - 2x^3 < 0, x < 2 \downarrow$$

$$\text{则 } f(x) \leq f(2) = 80 \downarrow$$

$$\text{则 } V \leq \sqrt{3} \times \sqrt{80} = 4\sqrt{15} \downarrow$$

$$\therefore \text{体积最大值为 } 4\sqrt{15} \text{ cm}^3 \downarrow$$



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。↓

(一) 必考题：共 60 分。↓

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$ 。

(1) 求 $\sin B \sin C$ ；↓

(2) 若 $6 \cos B \cos C = 1, a = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

【解析】本题主要考查三角函数及其变换，正弦定理，余弦定理等基础知识的综合应用。

$$(1) \because \triangle ABC \text{ 面积 } S = \frac{a^2}{3\sin A}, \text{ 且 } S = \frac{1}{2} bc \sin A \downarrow$$

$$\therefore \frac{a^2}{3\sin A} = \frac{1}{2} bc \sin A \downarrow$$

$$\therefore a^2 = \frac{3}{2}bc \sin^2 A \downarrow$$

$$\therefore \text{由正弦定理得 } \sin^2 A = \frac{3}{2} \sin B \sin C \sin^2 A, \downarrow$$

$$\text{由 } \sin A \neq 0 \text{ 得 } \sin B \sin C = \frac{2}{3} \downarrow$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \sin B \sin C = \frac{2}{3}, \cos B \cos C = \frac{1}{6} \downarrow$$

$$\therefore A+B+C = \pi \downarrow$$

$$\therefore \cos A = \cos(\pi - B - C) = -\cos(B+C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C = \frac{1}{2} \downarrow$$

$$\text{又 } \because A \in (0, \pi) \downarrow$$

$$\therefore A = 60^\circ, \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos A = \frac{1}{2} \downarrow$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - bc = 9 \quad \textcircled{1} \downarrow$$

$$\text{由正弦定理得 } b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B, c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C \downarrow$$

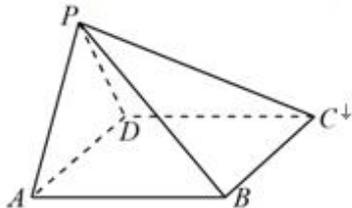
$$\therefore bc = \frac{a^2}{\sin^2 A} \cdot \sin B \sin C = 8 \quad \textcircled{2} \downarrow$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 得 } b+c = \sqrt{33} \downarrow$$

$$\therefore a+b+c = 3 + \sqrt{33}, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 周长为 } 3 + \sqrt{33} \downarrow$$

18. (12分) ↓

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ 中，且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$. ↓



(1) 证明：平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ; ↓

(2) 若 $PA = PD = AB = DC$, $\angle APD = 90^\circ$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值 . ↓

【解析】 (1) 证明： $\because \angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ ↓

$\therefore PA \perp AB$, $PD \perp CD$ ↓

又 $\because AB \parallel CD$, $\therefore PD \perp AB$ ↓

又 $\because PD \cap PA = P$, PD 、 $PA \subset$ 平面 PAD ↓

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD , 又 $AB \subset$ 平面 PAB ↓

\therefore 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ↓

(2) 取 AD 中点 O , BC 中点 E , 连接 PO , OE ↓

$\because AB \parallel CD$ ↓

\therefore 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 ↓

$\therefore OE \parallel AB$ ↓

由 (1) 知， $AB \perp$ 平面 PAD ↓

$\therefore OE \perp$ 平面 PAD , 又 PO 、 $AD \subset$ 平面 PAD ↓

$\therefore OE \perp PO$, $OE \perp AD$ ↓

又 $\because PA = PD$, $\therefore PO \perp AD$ ↓

$\therefore PO$ 、 OE 、 AD 两两垂直 ↓

\therefore 以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ ↓

设 $PA = 2$, $\therefore D(-\sqrt{2}, 0, 0)$ 、 $B(\sqrt{2}, 2, 0)$ 、 $P(0, 0, \sqrt{2})$ 、 $C(-\sqrt{2}, 2, 0)$, ↓

$\therefore \vec{PD} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ 、 $\vec{PB} = (\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2})$ 、 $\vec{BC} = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$ ↓

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 PBC 的法向量 ↓

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{2}x + 2y - \sqrt{2}z = 0 \\ -2\sqrt{2}x = 0 \end{cases} \downarrow$$

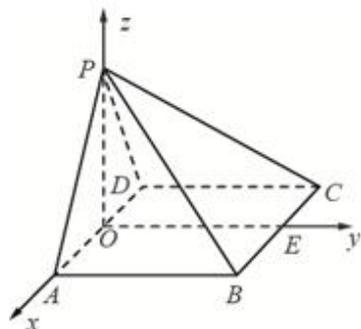
令 $y = 1$, 则 $z = \sqrt{2}$, $x = 0$, 可得平面 PBC 的一个法向量 $\vec{n} = (0, 1, \sqrt{2})$ ↓

$\because \angle APD = 90^\circ$, $\therefore PD \perp PA$ ↓

又知 $AB \perp$ 平面 PAD , $PD \subset$ 平面 PAD ↓

$\therefore PD \perp AB$, 又 $PA \cap AB = A$ ↓

$\therefore PD \perp$ 平面 PAB ↓



【解析】 ↓

 即 \overrightarrow{PD} 是平面 PAB 的一个法向量， $\overrightarrow{PD} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ ↓

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{PD}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{PD}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} ↓$$

 由图知二面角 $A-PB-C$ 为钝角，所以它的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↓

19. (12分) ↓

 为了抽检某种零件的一条生产线的生产过程，实验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）。根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。 ↓

 (1) 假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的零件数，求 $P(X \geq 1)$ 及 X 的数学期望； ↓

 (2) 一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查。 ↓

(I) 试说明上述监控生产过程方法的合理性； ↓

(II) 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸： ↓

9.95 10.12 9.96 9.96 10.01 9.92 9.98 10.04 ↓

10.26 9.91 10.13 10.02 9.22 10.04 10.05 9.95 ↓

 经计算得 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97$ ， $s = \sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} \left(\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2 \right)} \approx 0.212$ ，其中 x_i 为

 抽取的第 i 个零件的尺寸， $i = 1, 2, \dots, 16$ 。 ↓

 用样本平均数 \bar{x} 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$ ，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$ ，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查，剔除 $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$ 之外的数据，用剩下的数据估计 μ 和 σ （精确到 0.01）。 ↓

 附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$ 。 ↓

$$0.9974^{16} \approx 0.9592, \quad \sqrt{0.008} \approx 0.09. ↓$$

【解析】(1) 由题可知尺寸落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之内的概率为 0.9974，落在

$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.0026. ↓

$$P(X=0) = C_{16}^0 (1-0.9974)^0 0.9974^{16} \approx 0.9592 \downarrow$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 1 - 0.9592 = 0.0408 \downarrow$$

由题可知 $X \sim B(16, 0.0026)$ ↓

$$\therefore E(X) = 16 \times 0.0026 = 0.0416 \downarrow$$

(2) (i) 尺寸落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.0026, ↓

由正态分布知尺寸落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外为小概率事件, ↓

因此上述监控生产过程的方法合理. ↓

(ii) ↓

$$\mu - 3\sigma = 9.97 - 3 \times 0.212 = 9.334 \downarrow$$

$$\mu + 3\sigma = 9.97 + 3 \times 0.212 = 10.606 \downarrow$$

$$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (9.334, 10.606) \downarrow$$

$\because 9.22 \notin (9.334, 10.606)$, \therefore 需对当天的生产过程检查. ↓

因此剔除 9.22 ↓

$$\text{剔除数据之后: } \mu = \frac{9.97 \times 16 - 9.22}{15} = 10.02. \downarrow$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= [(9.95-10.02)^2 + (10.12-10.02)^2 + (9.96-10.02)^2 + (9.96-10.02)^2 + (10.01-10.02)^2 \\ &\quad + (9.92-10.02)^2 + (9.98-10.02)^2 + (10.04-10.02)^2 + (10.26-10.02)^2 + (9.91-10.02)^2 \\ &\quad + (10.13-10.02)^2 + (10.02-10.02)^2 + (10.04-10.02)^2 + (10.05-10.02)^2 + (9.95-10.02)^2] \times \frac{1}{15} \\ &\approx 0.008 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{0.008} \approx 0.09 \downarrow$$

20. (12分) ↓

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

中恰有三点在椭圆 C 上. ↓

(1) 求 C 的方程; ↓

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A 、 B 两点, 若直线 P_1A 与直线 P_1B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点. ↓

【解析】(1) 根据椭圆对称性, 必过 P_3 、 P_4 ↓

又 P_4 横坐标为 1, 椭圆必不过 P_1 , 所以过 P_2 , P_3 , P_4 三点 ↓

将 $P_2(0, 1)$, $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 代入椭圆方程得 ↓

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = 4, b^2 = 1 \downarrow$$

\therefore 椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. ↓

(2) ① 当斜率不存在时，设 $l: x = m, A(m, y_A), B(m, -y_A) \downarrow$

$$k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_A - 1}{m} + \frac{-y_A - 1}{m} = \frac{-2}{m} = -1 \downarrow$$

得 $m = 2$ ，此时 l 过椭圆右顶点，不存在两个交点，故不满足. \downarrow

② 当斜率存在时，设 $l: y = kx + b (b \neq 1) \downarrow$

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \downarrow$

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \text{整理得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kbx + 4b^2 - 4 = 0 \downarrow$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8kb}{1 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4b^2 - 4}{1 + 4k^2} \downarrow$$

$$\text{则 } k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = \frac{x_2(kx_1 + b) - x_1 + x_1(kx_2 + b) - x_2}{x_1 x_2} \downarrow$$

$$= \frac{8kb^2 - 8k - 8kb^2 + 8kb}{1 + 4k^2} \downarrow$$

$$= \frac{8k(b-1)}{4(b+1)(b-1)} = -1, \text{ 又 } b \neq 1 \downarrow$$

$$\Rightarrow b = -2k - 1, \text{ 此时 } \Delta = -64k, \text{ 存在 } k \text{ 使得 } \Delta > 0 \text{ 成立. } \downarrow$$

\therefore 直线 l 的方程为 $y = kx - 2k - 1 \downarrow$

当 $x = 2$ 时， $y = -1 \downarrow$

所以 l 过定点 $(2, -1)$. \downarrow

21. (12分) \downarrow

已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$. \downarrow

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性; \downarrow

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围. \downarrow

【解析】 (1) 由于 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x \downarrow$

$$\text{故 } f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^x - 1)(2e^x + 1) \downarrow$$

① 当 $a \leq 0$ 时， $ae^x - 1 < 0, 2e^x + 1 > 0$. 从而 $f'(x) < 0$ 恒成立. \downarrow

$f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减. \downarrow

② 当 $a > 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，从而 $ae^x - 1 = 0$ ，得 $x = -\ln a$. \downarrow

x	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调减	极小值	单调增

综上，当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减; \downarrow

当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增. \downarrow

(2) 由(1)知, \ast

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调减, 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上至多一个零点, 不满足条件. \downarrow

当 $a > 0$ 时, $f_{\min} = f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$. \downarrow

令 $g(a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$. \downarrow

令 $g(a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a (a > 0)$, 则 $g'(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} > 0$. 从而 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增, 而 $g(1) = 0$. 故当 $0 < a < 1$ 时, $g(a) < 0$. 当 $a = 1$ 时 $g(a) = 0$. 当 $a > 1$ 时 $g(a) > 0$

若 $a > 1$, 则 $f_{\min} = 1 - \frac{1}{a} + \ln a = g(a) > 0$, 故 $f(x) > 0$ 恒成立, 从而 $f(x)$ 无零点, 不满足条件. \downarrow

若 $a = 1$, 则 $f_{\min} = 1 - \frac{1}{a} + \ln a = 0$, 故 $f(x) = 0$ 仅有一个实根 $x = -\ln a = 0$, 不满足条件. \downarrow

若 $0 < a < 1$, 则 $f_{\min} = 1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$, 注意到 $-\ln a > 0$. $f(-1) = \frac{a}{e^2} + \frac{a}{e} + 1 - \frac{2}{e} > 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-1, -\ln a)$ 上有一个实根, 而又 $\ln\left(\frac{3}{a}-1\right) > \ln\frac{1}{a} = -\ln a$. \downarrow

$$\begin{aligned} \text{且 } f\left(\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)\right) &= e^{\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)} \left(a \cdot e^{\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)} + a - 2 \right) - \ln\left(\frac{3}{a}-1\right) \\ &= \left(\frac{3}{a}-1\right) \cdot (3-a+a-2) - \ln\left(\frac{3}{a}-1\right) = \left(\frac{3}{a}-1\right) - \ln\left(\frac{3}{a}-1\right) > 0. \downarrow \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $\left(-\ln a, \ln\left(\frac{3}{a}-1\right)\right)$ 上有一个实根. \downarrow

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调增, 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上至多两个实根. \downarrow

又 $f(x)$ 在 $(-1, -\ln a)$ 及 $\left(-\ln a, \ln\left(\frac{3}{a}-1\right)\right)$ 上均至少有一个实数根, 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R}

上恰有两个实根. \downarrow

综上, $0 < a < 1$. \ast

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数)，直线 l 的参数

方程为 $\begin{cases} x = a + 4t, \\ y = 1 - t, \end{cases}$ (t 为参数)。

(1) 若 $a = -1$ ，求 C 与 l 的交点坐标；

(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$ ，求 a 。

【解析】 (1) $a = -1$ 时，直线 l 的方程为 $x + 4y - 3 = 0$ 。

曲线 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ，

$$\text{联立方程 } \begin{cases} x + 4y - 3 = 0 \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{21}{25} \\ y = \frac{24}{25} \end{cases},$$

则 C 与 l 交点坐标是 $(3, 0)$ 和 $(-\frac{21}{25}, \frac{24}{25})$ 。

(2) 直线 l 一般式方程是 $x + 4y - 4 - a = 0$ 。

设曲线 C 上点 $P(3 \cos \theta, \sin \theta)$ 。

$$\text{则 } P \text{ 到 } l \text{ 距离 } d = \frac{|3 \cos \theta + 4 \sin \theta - 4 - a|}{\sqrt{17}} = \frac{|5 \sin(\theta + \varphi) - 4 - a|}{\sqrt{17}}, \text{ 其中 } \tan \varphi = \frac{3}{4}.$$

依题意得： $d_{\max} = \sqrt{17}$ ，解得 $a = -16$ 或 $a = 8$ 。

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 4$, $g(x) = |x+1| + |x-1|$.

 (1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集;

 (2) 若不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集包含 $[-1, 1]$, 求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = -x^2 + x + 4$, 是开口向下, 对称轴 $x = \frac{1}{2}$ 的二次函数.

$$g(x) = |x+1| + |x-1| = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x, & x < -1 \end{cases}$$

 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 令 $-x^2 + x + 4 = 2x$, 解得 $x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

 \therefore 此时 $f(x) \geq g(x)$ 解集为 $\left[1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$.

 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $g(x) = 2$, $f(x) \geq f(-1) = 2$.

 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g(x)$ 单调递减, $f(x)$ 单调递增, 且 $g(-1) = f(-1) = 2$.

 综上所述, $f(x) \geq g(x)$ 解集 $\left[-1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$.

 (2) 依题意得: $-x^2 + ax + 4 \geq 2$ 在 $[-1, 1]$ 恒成立.

 即 $x^2 - ax - 2 \leq 0$ 在 $[-1, 1]$ 恒成立.

 则只须 $\begin{cases} 1^2 - a \cdot 1 - 2 \leq 0 \\ (-1)^2 - a(-1) - 2 \leq 0 \end{cases}$, 解出: $-1 \leq a \leq 1$.

 故 a 取值范围是 $[-1, 1]$.