

中考数学必备经典题型

题型一 先化简再求值

命题趋势

由近几年的中考题型可知，分式的化简求值是每年的考查重点，几乎都以解答题的形式出现，其中以除法和减法形式为主，要求对分式化简的运算法则及分式有意义的条件熟练掌握。

例：先化简，再求值： $(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}) \div \frac{x^2-x}{x^2-2x+1}$ ，其中 $x = \sqrt{2}-1$ 。

分析：原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，将 x 的值带入计算即可求值。

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} \\ &= \frac{2x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} \\ &= \frac{2}{x+1}, \\ \text{当 } x &= \sqrt{2}-1 \text{ 时，原式} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

题型二 阴影部分面积的相关计算

命题趋势

近年来的中考有关阴影面积的题目几乎每年都会考查到，而且不断翻新，精彩纷呈。这类问题往往与变换、函数、相似等知识结合，涉及到转化、整体等数学思想方法，具有很强的综合性。

例 如图 17, 记抛物线 $y = -x^2 + 1$ 的图象与 x 正半轴的交点为 A , 将线段 OA 分成 n 等份. 设分点分别为 P_1, P_2, \dots, P_{n-1} , 过每个分点作 x 轴的垂线, 分别与抛物线交于点 Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} , 再记直角三角形 $OP_1Q_1, P_1P_2Q_2, \dots$ 的面积分别为 S_1, S_2, \dots , 这样就有 $S_1 = \frac{n^2-1}{2n^2}$, $S_2 = \frac{n^2-4}{2n^2} \dots$; 记 $W = S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}$, 当 n 越来越大时, 你猜想 W 最接近的常数是 ()

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

分析 如图 17, 抛物线 $y = -x^2 + 1$ 的图象与 x 轴交于点 $A(1, 0)$, 与 y 轴的交点为 $B(0, 1)$.

设抛物线与 y 轴及 x 正半轴所围成的面积为 S ,

抛物线上, 则

$$\begin{aligned} OM^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (1-y) + y^2 \\ &= \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

由 $0 \leq y \leq 1$, 得 $\frac{3}{4} \leq OM^2 \leq 1$.

这段图象在图示半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、1 的两个 $\frac{1}{4}$ 圆所夹的圆环内, 所以 S 在图示两个圆 $\frac{1}{4}$ 面积之间, 即

$$\frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 < S < \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2,$$

$$\text{从而 } \frac{3}{16}\pi < S < \frac{1}{4}\pi.$$

显然, 当 n 的值越大时, W 的值就越来越接近抛物线与 y 轴和 x 正半轴所围成的面积的一半, 所以

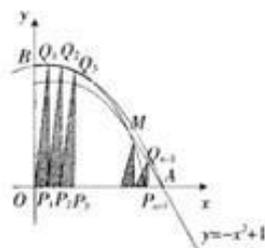


图 17

$$\frac{3}{32}\pi < W < \frac{1}{8}\pi.$$

与其最接近的值是，故本题应选 C.

题型三 解直角三角形的实际应用

命题趋势

解直角三角形的应用是中考的必考内容之一，它通常以实际生活为背景，考查学生运用直角三角形知识建立数学模型的能力，解答这类问题的方法是运用“遇斜化直”的数学思想，即通过作辅助线(斜三角形的高线)把它转化为直角三角形问题，然后根据已知条件与未知元素之间的关系，利用解直角三角形的知识，列出方程来求解。

例 如图 2，学校旗杆附近有一斜坡。小明准备测量旗杆 AB 的高度，他发现当斜坡正对着太阳时，旗杆 AB 的影子恰好落在水平地面和斜坡的坡面上，此时小明测得水平地面上的影长 BC=20 米，斜坡坡面上的影长 CD=8 米，太阳光线 AD 与水平地面 BC 成 30° 角，斜坡 CD 与水平地面 BC 成 45° 的角，求旗杆 AB 的高度。

($\sqrt{3}=1.732$ $\sqrt{2}=1.414$ $\sqrt{6}=2.449$ 精确到 1 米)。

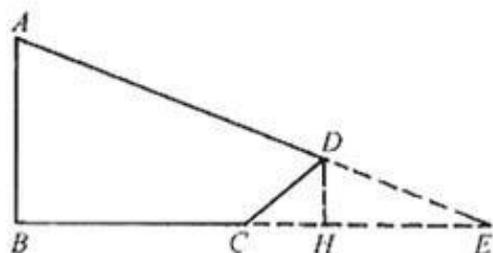


图 2

简解：延长 AD 交 BC 延长线于 E，作 $DH \perp BC$ 于 H。

在 $Rt\triangle DCH$ 中， $\angle DCH=45^\circ$ ， $DC=8$ ，

所以 $DH=HC=8\sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$

在 $Rt\triangle DHE$ 中， $\angle E=30^\circ$

$$HE = \frac{DH}{\tan 30^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 4\sqrt{6}$$

所以 $BE=BC+CH+HE$

$$\begin{aligned} &= 20 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6} \\ &= 20 + 5.656 + 9.796 \\ &= 35.452 \end{aligned}$$

在 $Rt\triangle ABE$ 中，

$$AB = BC \cdot \tan 30^\circ = 35.452 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 20(\text{米})。$$

答：旗杆的高度约为 20 米。

点拨：解本题的关键在于作出适当的辅助线，构造直角三角形，并灵活地应用解直角三角形的知识去解决实际问题。

题型四 一次函数和反比例函数的综合题

一次函数和反比例函数的综合题近几年来几乎每年都会考到，基本上是在 19 题或者 20 题的位置出现，难度中等，问题主要为：求函数的解析式，利用数形结合思想求不等式的解集以及结合三角形，四边形知识的综合考查。

例 已知 $A(m, 2)$ 是直线 l 与双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 的交点。

(1) 求 m 的值；

(2) 若直线 l 分别与 x 轴、 y 轴相交于 E 、 F 两点，并且 $\text{Rt}\triangle OEF$ (O 是坐标原点) 的外心为点 A ，试确定直线 l 的解析式；

(3) 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上另取一点 B 作 $BK \perp x$ 轴于 K ；将 (2) 中的直线 l 绕点 A 旋转后所得的直线记为 l' ，若 l' 与 y 轴的正半轴相交于点 C ，且 $OC = \frac{1}{4}OF$ ，试问在 y 轴上是否存在点 p ，使得

$$S_{\triangle PCA} = S_{\triangle BOK}$$

若存在，请求出点 P 的坐标？若不存在，请说明理由。

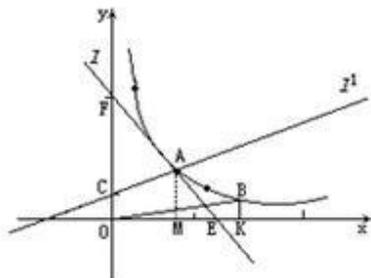


图13-31

解：(1) \because 直线 l 与双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 的一个交点为 $A(m, 2)$ ，

$$\therefore \frac{3}{m} = 2, \text{ 即 } m = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore A \text{ 点坐标为 } \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

(2) 作 $AM \perp x$ 轴于 M .

\because A 点是 $Rt\triangle OEF$ 的外心,

$\therefore EA=FA$.

由 $AM \parallel y$ 轴有 $OM=ME$.

$\therefore OF=2OM$.

$\because MA=2, \therefore OF=4$.

$\therefore F$ 点的坐标为 $(0, 4)$.

设 $l: y=kx+b$, 则有

$$\begin{cases} \frac{3}{2}k+b=2, \\ b=4. \end{cases} \therefore \begin{cases} k=-\frac{4}{3}, \\ b=4. \end{cases}$$

\therefore 直线 l 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$.

(3) $\because OC=\frac{1}{4}OF, \therefore OC=1$.

$\therefore C$ 点坐标为 $(0, 1)$.

设 B 点坐标为 (x_1, y_1) , 则

$$x_1 y_1 = 3.$$

$$\therefore S_{\triangle BOK} = \frac{1}{2}|x_1| \cdot |y_1| = \frac{3}{2}.$$

设 P 点坐标为 $(0, y)$, 满足 $S_{\triangle PCA} = S_{\triangle BOK}$.

① 当点 P 在 C 点上方时, $y > 1$, 有

$$S_{\triangle PCA} = \frac{1}{2}(y-1) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}(y-1) = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore y=3.$$

② 当点 P 在 C 点下方时, $y < 1$, 有

$$S_{\triangle PCA} = \frac{1}{2}(1-y) = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore y = -2.$$

综上知，在 y 轴存在点 $P(0, 3)$ 与 $(0, -2)$ ，使得 $S_{\triangle PAC} = S_{\triangle BOK}$

总结：直线与双曲线的综合题的重要组成部分是两种图象的交点，这是惟一能沟通它们的要素，应用交点时应注意：

(1) 交点既在直线上也在双曲线上，交点坐标既满足直线的解析式也满足双曲线的解析式。

(2) 要求交点坐标时，应将两种图象对应的解析式组成方程组，通过解方程组求出交点坐标。

(3) 判断两种图象有无交点时，可用判别式确定，也可以画出草图直观地确定。

题型五 实际应用题

命题趋势

中考考查的实际应用题知识点主要集中在一次方程(组)，一次不等式，一次函数的实际应用及其相关方案的设计问题，此类问题近几年每年必考，且分值相对稳定。

例 某学校为开展“阳光体育”活动，计划拿出不超过 3000 元的资金

拍的单价比为 $8:3:2$ ，且其单价和为 130 元。

(1) 请问篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别是多少元？

(2) 若要求购买篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的总数量是 80 个（副），羽毛球拍的数量是篮球数量的 4 倍，且购买乒乓球拍的数量不超过 15 副，请问有几种购买方案？

解题方法指导：

列方程解应用题的一般步骤：（1）审题，弄清题意。即全面分析已知量与未知量，已知量与未知量的关系；（2）根据题目需要设合适的未知量；（3）找出题目中的等量关系，并列方程；（4）解方程，求出未知数的值；（5）检验并作答，对方称的解进行检验，看是否符合题意，针对问题做出答案。

题型六 函数动态变化问题

命题趋势

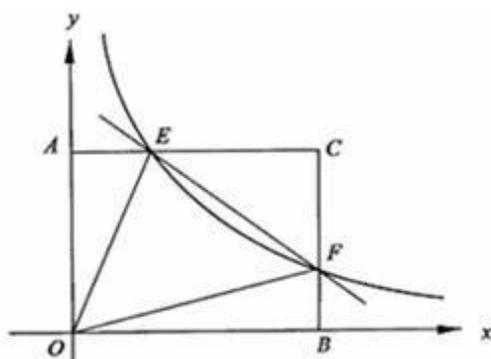
函数动态变化问题最近几年每年必考，该类问题综合性强，题目难度较大，题型，题序及分值都很稳定，每年均在 23 题以解答题的形式命题。一般为 3 问，第一问常常考查待定系数法确定二次函数解析式；第二问结合三角形周长，面积及线段长等问题考查二次函数解析式及最值问题；第三问多是几何图形的探究问题。

例 已知：在矩形 $AOBC$ 中， $OB=4$ ， $OA=3$ 。分别以 OB ， OA 所在直线为 x 轴和 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系。 F 是边 BC 上的一个动点（不与 B ， C 重合），过 F 点的反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象与 AC 边交于点 E 。

(1) 求证： $\triangle AOE$ 与 $\triangle BOF$ 的面积相等；

(2) 记 $S = S_{\triangle OEF} - S_{\triangle CEF}$ ，求当 k 为何值时， S 有最大值，最大值为多少？

(3) 请探索：是否存在这样的点 F ，使得将 $\triangle CEF$ 沿 EF 对折后， C 点恰好落在 OB 上？若存在，求出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由。



思路分析

本题看似几何问题，但是实际上 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOF$ 这两个直角三角形的底边和高恰好就是 E, F 点的横坐标和纵坐标，而这个乘积恰好就是反比例函数的系数 k 。所以直接设点即可轻松证出结果。第二问有

结果就可以发现这个矩形中的三个 $RT\triangle$ 面积都是异常好求的。于是利用矩形面积减去三个小 $RT\triangle$ 面积即可，经过一系列化简即可求得表达式，利用对称轴求出最大值。第三问的思路就是假设这个点存在，看看能不能证明出来。因为是翻折问题，翻折之后大量相等的角和边，所以自然去利用三角形相似去求解，于是变成一道比较典型的几何题目，做垂线就可以了。

方法指导

针对函数与几何图形结合的题目，首先要考虑代数与几何知识之间的相互关联，找出其内在的联系，然后设出要求的解析式，用待定系数法求解即可。对于涉及存在探究性问题，首先假设条件的存在，然后再通过证明推理及计算，探究所假设的结果是否与已知，推理过程相矛盾，若矛盾则假设不成立，否则假设成立。